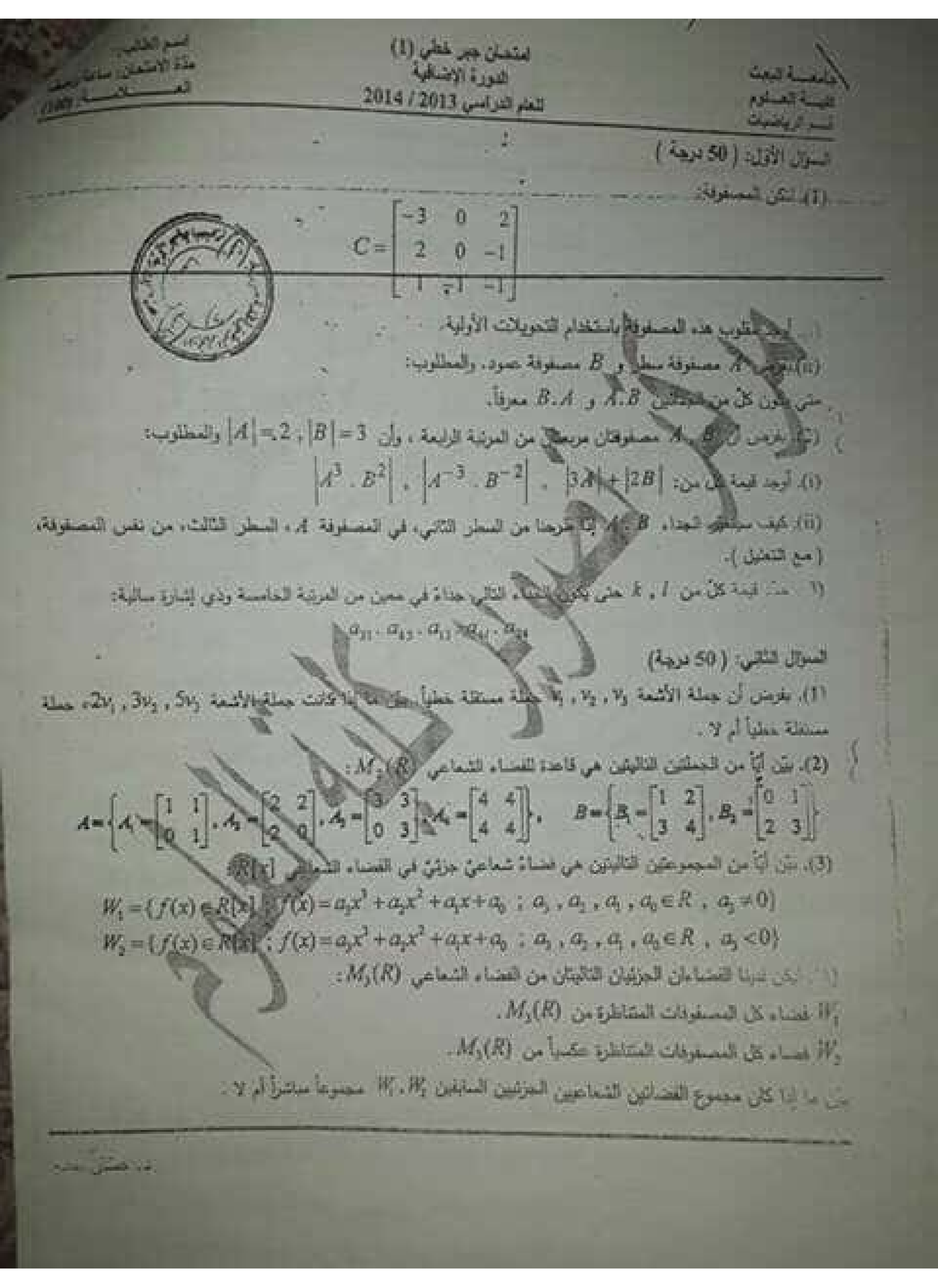


السؤال الأول: (50 درجة)

(1). لتكن المصفوفة:

$$C=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

أوجد مقلوب هذه المصفوفة باستخدام التحويلات الأولية.

(ii). بفرض A مصفوفة سطر و B مصفوفة عمود، والمطلوب:
حتى يكون كل من الجدائين $A.B$ و $B.A$ معرفاً.

(2). بفرض أن A ، B مصفوفتان مربعتان من المرتبة الرابعة ، وأن $|A|=2$ ، $|B|=3$ والمطلوب:

(i). أوجد قيمة كل من: $|3A|+|2B|$ ، $\left|A^{-3}\cdot B^{-2}\right|$ ، $\left|A^{3}\cdot B^{2}\right|$

(ii). كيف سيكون الجداء $A\cdot B$ إذا طرحنا من السطر الثاني، في المصفوفة A ، السطر الثالث، من نفس المصفوفة، (مع التعليل).

(3). حدد قيمة كل من l ، k حتى يكون الجداء التالي جداءً في معين من المرتبة الخامسة وذي إشارة سالبة:

$$a_{31}\cdot a_{43}\cdot a_{13}\cdot a_{k1}\cdot a_{24}$$

السؤال الثاني: (50 درجة)

(1). بفرض أن جملة الأشعة v_1 ، v_2 ، v_3 جملة مستقلة خطياً. بيّن فيما إذا كانت جملة الأشعة $5v_3$ ، $3v_2$ ، $2v_1$ جملة مستقلة خطياً أم لا.

(2). بيّن أيّاً من الجملتين التاليتين هي قاعدة للفضاء الشعاعي $M_2(R)$:

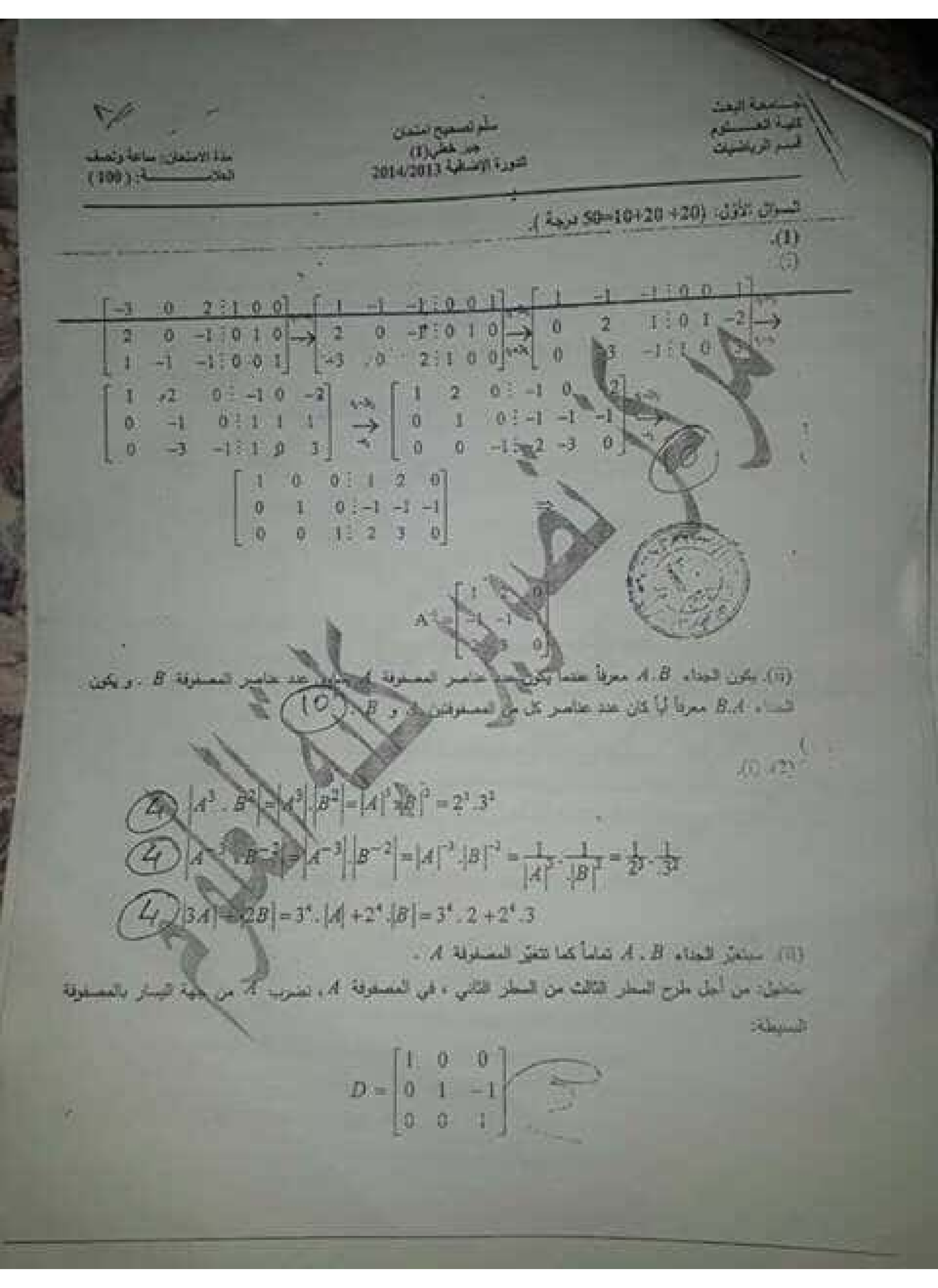
$$A=\left\{A_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 0 & 3\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{bmatrix}\right\},\quad B=\left\{B_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\right\}$$

(3). بيّن أيّاً من المجموعتين التاليتين هي فضاء شعاعي جزئي في الفضاء الشعاعي $R[x]$:

$$W_1=\{f(x)\in R[x]\ ;\ f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\ ;\ a_3 , a_2 , a_1 , a_0\in R\ ,\ a_3\neq 0\}$$
$$W_2=\{f(x)\in R[x]\ ;\ f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\ ;\ a_3 , a_2 , a_1 , a_0\in R\ ,\ a_3<0\}$$

(4). ليكن لدينا الفضاءان الجزئيان التاليان من الفضاء الشعاعي $M_3(R)$:
W_1 فضاء كل المصفوفات المتناظرة من $M_3(R)$.
W_2 فضاء كل المصفوفات المتناظرة عكسياً من $M_3(R)$.
بيّن فيما إذا كان مجموع الفضائين الشعاعيين الجزئيين السابقين W_1 , W_2 مجموعاً مباشراً أم لا.

د. [illegible]



جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان
جبر خطي (1)
الدورة الإضافية 2014/2013

مدة الامتحان: ساعة ونصف
العلامة: (100)

السؤال الأول: (20 +20+10=50 درجة).

(1).

(أ)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 3\end{array}\right]\rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 3\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0\end{array}\right]\rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0\end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

(ب). يكون الجداء $A.B$ معرفاً عندما يكون عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطر المصفوفة B . و يكون الجداء $B.A$ معرفاً لما كان عدد عناصر كل من المصفوفتين A و B . (15)

(2) (أ)

(4) $|A^3 . B^2| = |A^3| . |B^2| = |A|^3 . |B|^2 = 2^3 . 3^2$

(4) $|A^{-3} . B^{-2}| = |A^{-3}| . |B^{-2}| = |A|^{-3} . |B|^{-2} = \frac{1}{|A|^3} . \frac{1}{|B|^2} = \frac{1}{2^3} . \frac{1}{3^2}$

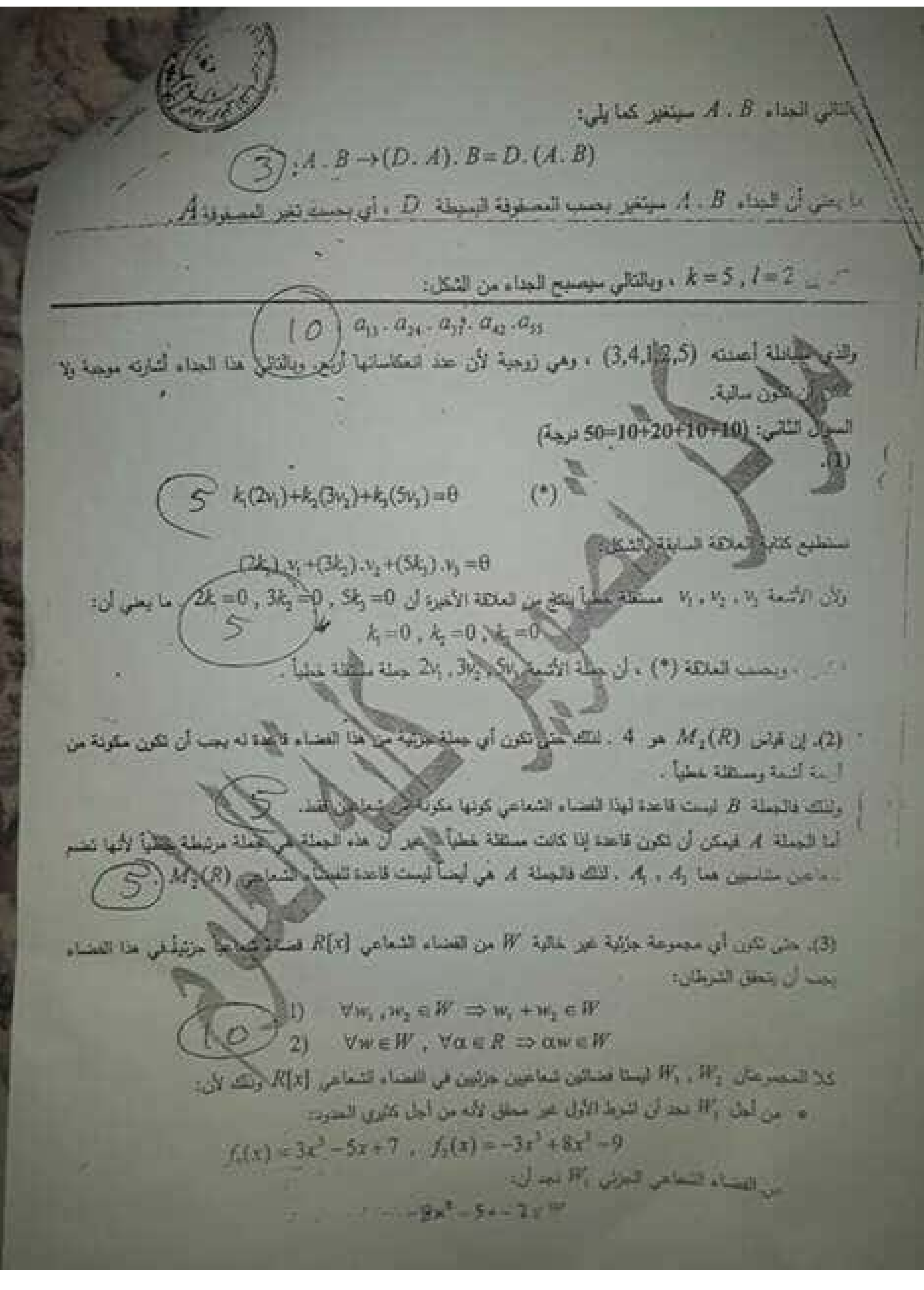
(4) $|3A + 2B| = 3^4 . |A| + 2^4 . |B| = 3^4 . 2 + 2^4 . 3$

(3). سنعتبر الجداء $A.B$ تماماً كما تعتبر المصفوفة A .

الحل: من أجل طرح السطر الثالث من السطر الثاني ، في المصفوفة A ، نضرب A من جهة اليسار بالمصفوفة البسيطة:

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner



وبالتالي الجداء $A.B$ سيتغير كما يلي:

$$A.B \to (D.A).B = D.(A.B)$$

ما يعني أن الجداء $A.B$ سيتغير بحسب المصفوفة البسيطة D ، أي بحسب تغير المصفوفة A.

[illegible] $k=5 , l=2$ ، وبالتالي سيصبح الجداء من الشكل:

$$a_{13}.a_{24}.a_{31}.a_{42}.a_{55}$$

والذي يقابله تبديلة أصلته $(3,4,1,2,5)$ ، وهي زوجية لأن عدد انعكاساتها أربع، وبالتالي هذا الجداء إشارته موجبة ولا يمكن أن تكون سالبة.

السؤال الثاني: (10+10+20+10=50 درجة)

(1).

$$k_1(2v_1)+k_2(3v_2)+k_3(5v_3)=\theta \qquad (*)$$

نستطيع كتابة العلاقة السابقة بالشكل:

$$(2k_1).v_1+(3k_2).v_2+(5k_3).v_3=\theta$$

ولأن الأشعة v_1 , v_2 , v_3 مستقلة خطياً ينتج من العلاقة الأخيرة أن $2k_1=0 , 3k_2=0 , 5k_3=0$ ، ما يعني أن:

$$k_1=0 , k_2=0 , k_3=0$$

... وبحسب العلاقة (*) ، أن جملة الأشعة $2v_1 , 3v_2 , 5v_3$ جملة مستقلة خطياً.

(2). إن قياس $M_2(R)$ هو 4 . لذلك حتى تكون أي جملة جزئية من هذا الفضاء قاعدة له يجب أن تكون مكونة من أربعة أشعة ومستقلة خطياً.

ولذلك فالجملة B ليست قاعدة لهذا الفضاء الشعاعي كونها مكونة من شعاعين فقط.

أما الجملة A فيمكن أن تكون قاعدة إذا كانت مستقلة خطياً، غير أن هذه الجملة هي جملة مرتبطة خطياً لأنها تضم شعاعين متساويين هما A_1 , A_3 . لذلك فالجملة A هي أيضاً ليست قاعدة للفضاء الشعاعي $M_2(R)$.

(3). حتى تكون أي مجموعة جزئية غير خالية W من الفضاء الشعاعي $R[x]$ فضاءً شعاعياً جزئياً في هذا الفضاء يجب أن يتحقق الشرطان:

1) $\forall w_1 , w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

2) $\forall w \in W , \forall \alpha \in R \Rightarrow \alpha w \in W$

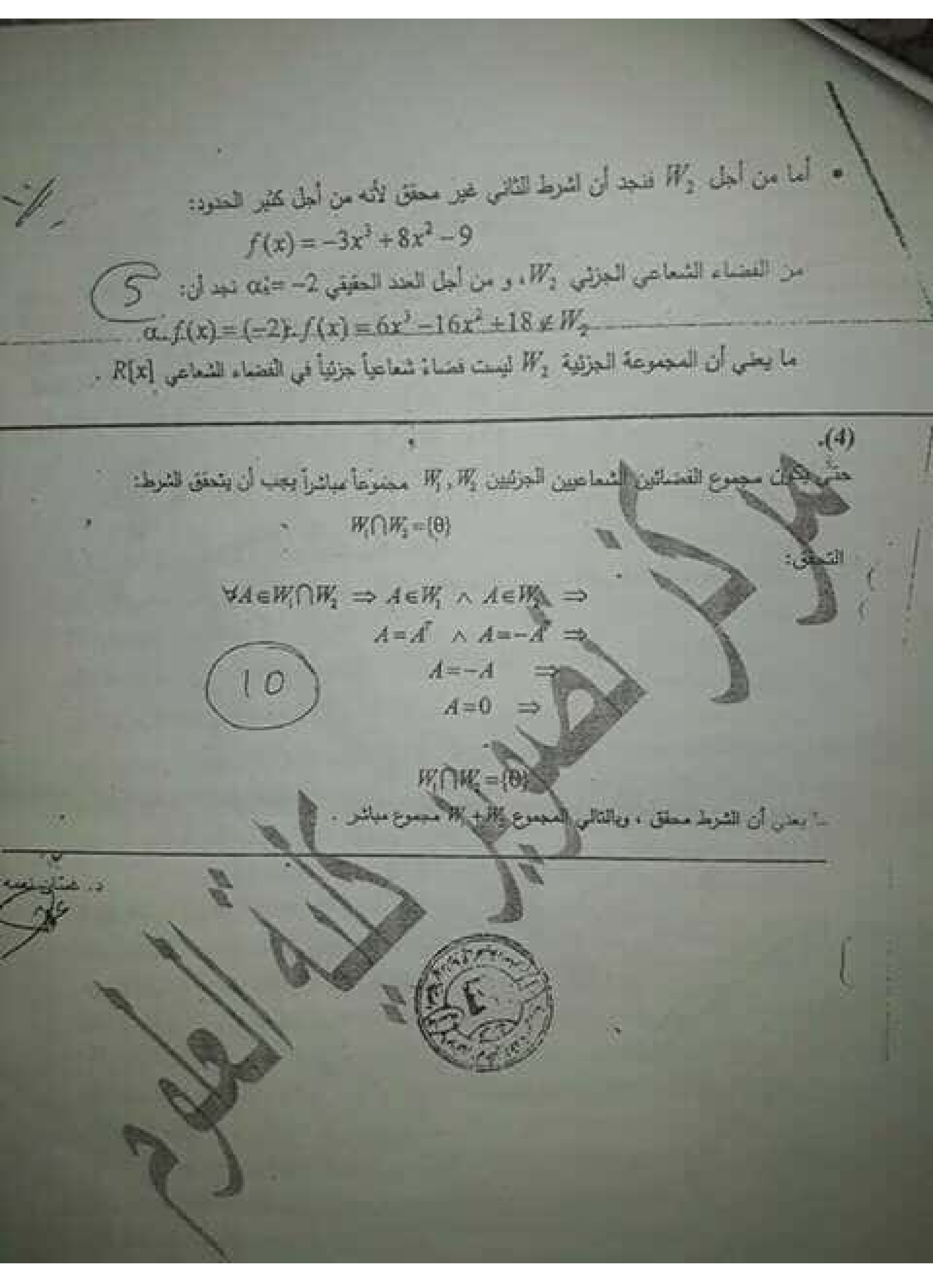
كلا المجموعتان W_1 , W_2 ليستا فضاءين شعاعيين جزئيين في الفضاء الشعاعي $R[x]$ وذلك لأن:

- من أجل W_1 نجد أن الشرط الأول غير محقق لأنه من أجل كثيري الحدود:

$$f_1(x)=3x^3-5x+7 , \quad f_2(x)=-3x^3+8x^2-9$$

من الفضاء الشعاعي الجزئي W_1 نجد أن:

[illegible] $= 8x^2-5x-2 \notin W$



- أما من أجل W_2 فنجد أن الشرط الثاني غير محقق لأنه من أجل كثير الحدود:

$$f(x)=-3x^3+8x^2-9$$

من الفضاء الشعاعي الجزئي W_2، و من أجل العدد الحقيقي $\alpha=-2$ نجد أن:

$$\alpha.f(x)=(-2).f(x)=6x^3-16x^2+18\notin W_2$$

ما يعني أن المجموعة الجزئية W_2 ليست فضاءً شعاعياً جزئياً في الفضاء الشعاعي $R[x]$.

5

(4).

حتى يكون مجموع الفضائين الشعاعيين الجزئيين W_1 , W_2 مجموعاً مباشراً يجب أن يتحقق الشرط:

$$W_1\cap W_2=\{\theta\}$$

التحقق:

$$\forall A\in W_1\cap W_2 \Rightarrow A\in W_1 \wedge A\in W_2 \Rightarrow$$
$$A=A^T \wedge A=-A^T \Rightarrow$$
$$A=-A \Rightarrow$$
$$A=0 \Rightarrow$$

10

$$W_1\cap W_2=\{\theta\}$$

ما يعني أن الشرط محقق ، وبالتالي المجموع W_1+W_2 مجموع مباشر .

د. غسان نعمة